M 132

ECOLE NATIONALE DE L'AVIATION CIVILE — MAI 1978

MATHEMATIQUES (Durée: 4 h)

CONCOURS DE RECRUTEMENT DES ELEVES-PILOTES DE LIGNE

CINQ exercices indépendants: les candidats doivent en choisir 4.

EXERCICE I :

λ est un paramètre variant de $-\infty$ à $+\infty$. Dans le système de coordonnées polaires associé au repère orthonormal $(O,\vec{i},\vec{j})$ du plan affine euclidien les courbes C_λ ont pour équation :

$E(\lambda)$: $r = a\cos\theta + \lambda$, a désignant une longueur.

1°) Montrer que $E(\lambda)$ et $E(-\lambda)$ définissent la même courbe.

Sur un même graphique représenter, selon les valeurs de λ, les différentes formes des courbes C_λ (On rappelle que les coordonnées des points d'inflexion d'une courbe définie par son équation en coordonnées polaires vérifient $r^2 + 2r'^2 - rr'' = 0$, r' et r" étant la dérivée première et seconde de r par rapport à θ).

2°) Déterminer et représenter sur le graphique l'ensemble des points des courbes C_λ où la tangente est perpendiculaire à $\vec{i}$.

3°) Déterminer et représenter sur le graphique l'ensemble des points des courbes C_λ où la tangente est parallèle à $\vec{i}$.

EXERCICE 2

n est un entier positif ou nul et α est un paramètre réel strictement supérieur à - 1. On considère l'intégrale définie :

$$I_n(\alpha) = \int_0^1 \frac{x^n\,dx}{\sqrt{(1-x)(1+\alpha x)}}.$$

1°) Calculer $I_0(0)$. Posant $\sqrt{(1-x)(1+\alpha x)} = t(1-x)$, calculer $I_0(\alpha)$. Monter que la fonction I_0 de la variable α est continue en $\alpha = 0$.

2°) Calculer $I_1(0)$. Exprimant $I_1(\alpha)$ en fonction de $I_0(\alpha)$ et d'une autre intégrale définie, calculer $I_1(\alpha)$. Montrer que la fonction I_1 de la variable α est continue en $\alpha = 0$.

3°) Calculant la dérivée de $x^n\sqrt{(1-x)(1+\alpha x)}$, établir une relation de récurrence entre $I_{n-1}(\alpha)$, $I_n(\alpha)$ et $I_{n+1}(\alpha)$.
En déduire les valeurs de $I_n(0)$ et de $I_n(1)$.

.../...

EXERCICE 3 :

Pour $p \geq 2$, l'espace vectoriel réel R^p étant rapporté à une base B, les composantes $x_n^1, \ldots . x_n^p$ du vecteur X_n de la suite $(X_n)_{n \in N}$ sont définies par :

$$x_n^i = \frac{1}{p-1} \sum_{j \neq i} x_{n-1}^j, \quad i = 1, \ldots, p.$$

1°) Déterminer la matrice A de l'application linéaire qui applique X_{n-1} sur X_n.

2°) I est la matrice de l'application identique de R^p sur R^p. K est la matrice, à p lignes et p colonnes, dont tous les éléments sont égaux à 1. A^n et K^n sont les puissances n des matrices A et K.

Montrer que $K^n = p^{n-1} K$ et déterminer les suites de nombres f (n) et g (n) telles que :

$A^n = f(n) A + g(n) I$.

Le premier élément X_o de $(X_n)_{n \in N}$ ayant, sur B, toutes ses composantes égales à 1, déterminer la limite de $(X_n)_{n \in N}$ lorsque n tend vers ∞

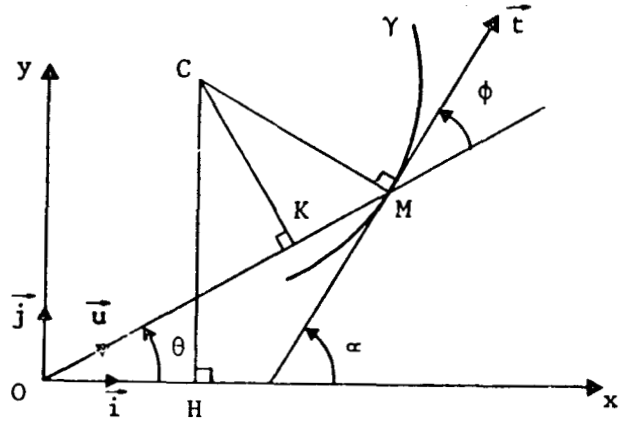
3°) Montrer que A est inversible et déterminer son inverse.

4°) Démontrer que le déterminant $P(\lambda)$ de la matrice $A - \lambda I$ admet deux zéros λ_1 et λ_2 distincts et vérifier que le polynôme de matrice $Q(A) = (A - \lambda_1 I)(A - \lambda_2 I)$ est identique à la matrice, à p lignes et p colonnes, dont tous les éléments sont nuls.

EXERCICE 4 :

a étant une constante, dans le système de coordonnées polaires associé au reprère orthonormal $(O, \vec{i}, \vec{j})$ du plan affine euclidien l'équation de la courbe γ est :

$r = a \sqrt{\sin 2\theta}$.



.../...

M étant un point de γ de coordonnées polaires (r,θ), on désigne respectivement par: $\vec{u}$ le vecteur $\vec{i}\cos\theta + \vec{j}\sin\theta$; C le centre de courbure en M ; H et K les projections orthogonales de C sur les droites $(O,\vec{i})$ et $(O,\vec{u})$; $\vec{t}$ le vecteur unitaire de la tangente en M orientée dans le sens des θ croissant ; α et ϕ les angles orientés $(\vec{i},\vec{t})$ et $(\vec{u},\vec{t})$; s l'abscisse curviligne de M, l'origine de γ étant O.

1°) Exprimer tg ϕ en fonction de θ et en déduire α en fonction de θ.

Exprimer successivemnt le rayon de courbure $R = \frac{ds}{d\alpha}$ de γ en M en fonction de : a et θ puis de a et r.

2°) Déterminer l'angle des droites affines CH et CK avec la droite affine CM.

Supposant a^2 = 3 600 mètres carrés, déterminer, en précisant les unités, les coordonnées polaires des points de γ où le rayon de courbure vaut 300 mètres ; pour ces point particuliers, calculer avec 5 chiffres significatifs les longueurs OH et CH.

3°) M étant un point quelconque de γ, calculer la valeur du rapport $\frac{\overline{OK}}{\overline{KM}}$ et déterminer une construction géométrique simple du centre de courbure de γ.

EXERCICE 5 :

1°) Etudier les variations de la fonction y, de la variable réelle x, définie par :

$$y : x \longrightarrow y = \frac{\text{Arcsin}\sqrt{x}}{\sqrt{x(1-x)}} .$$

Dans le plan affine euclidien, rapporté au repère orthonormal $(O,\vec{i},\vec{j})$, construire la courbe représentant cette fonction et préciser la forme de cette courbe au voisinage du point d'abscisse x = 0.

2°) Montrer que y est solution de l'équation différentielle :

$$2x(1-x)y' + (1-2x)y = 1$$

Pour tout $x \in \left\{ R - \{0\} - \{1\} \right\}$, déterminer la solution générale de cette équation différentielle en précisant bien l'expression de cette solution selon les valeurs de x.

-FIN-

www.tunisie-etudes.info

Ce document a été téléchargé depuis
www.tunisie-etudes.info

Des documents gratuits, devoirs, examens, cours, exercices, corrigés... Ainsi que toute une rubrique pour vous aider à trouver un emploi sans oublier les avis de concours en direct

Notre page Twitter :
http://www.twitter.com/TunisieEtudes
Notre page FaceBook :
http://www.facebook.com/TunisieEtudes



Merci d'avoir choisi www.tunisie-etudes.info
Bonne lecture et bon travail